

На правах рукописи



Лысенкова Светлана Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Сургут – 2013

Работа выполнена на кафедре прикладной математики
ГБОУ ВПО «Сургутский государственный университет
Ханты-Мансийского автономного округа – Югры»

**Научный
руководитель:** доктор физико-математических наук,
профессор
Тарakanов Виктор Иванович

**Официальные
оппоненты:** **Баутин Сергей Петрович,**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО «Уральский
государственный университет путей
сообщения», заведующий кафедрой
Высшей и прикладной математики

Кучерявенко Дмитрий Григорьевич,
кандидат физико-математических наук,
ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный
нефтегазовый университет», доцент кафедры
Автоматизации и вычислительной техники

**Ведущая
организация:** ФГБОУ ВПО «Югорский
государственный университет»
(г. Ханты-Мансийск)

Защита состоится « 19 » декабря 2013 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.274.14 при ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет» по адресу: 625003 г. Тюмень, ул. Перекopская, 15а, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-библиотечном центре ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет».

Автореферат разослан « 18 » ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Оленников Евгений
Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Потеря устойчивости функционирования технических или физических систем носит разнообразный характер, при этом можно выделить такие виды потери устойчивости как: статическая, динамическая, при параметрических колебаниях и др. Под параметрическими колебаниями понимают колебания, при которых внешнее периодическое воздействие на систему входит в уравнение колебаний не в виде слагаемых, а в виде периодических коэффициентов при дифференциальных операторах.

При исследовании параметрических колебаний возникают определенные математические трудности, которые разрешают приближенными методами. Однако приближенные методы не дают математически корректного моделирования процессов параметрических колебаний.

Проблема параметрических колебаний чаще всего встречается в двух случаях: когда они сопровождаются наличием демпфирования, то есть внутреннего или внешнего трения, и когда они сопровождаются дополнительным движением системы в виде прецессии. Примером параметрической колебательной системы при наличии демпфирования могут быть качели, которые раскачивают стоя на них и приседая в такт колебаниям, а демпфирующей силой при этом является в основном аэродинамическое сопротивление. Явление прецессии встречается в гироскопических системах.

Целью диссертационной работы является разработка новых математических методов численного моделирования параметрических колебаний систем с учетом демпфирования и прецессии, а также исследование особенностей и закономерностей этих процессов с использованием нового итерационного алгоритма.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Разработка математического метода перехода задачи о нахождении границ между областями устойчивости и неустойчивости параметрических колебаний с учетом демпфирования к спектральной задаче для дифференциального уравнения.
2. Разработка математического метода перехода спектрального уравнения с учетом демпфирования в дифференциальной форме к спектральному уравнению в операторной форме.
3. Разработка программного комплекса для математического моделирования процессов параметрических колебаний на основе итерационной схемы.

4. Проведение исследования и построение областей устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров, характеризующих воздействие, приводящее к параметрическому резонансу.

5. Разработка математического метода перехода задачи о прецессии маятника на кардановом подвесе при вынужденных вертикальных колебаниях точки подвеса к спектральному дифференциальному уравнению.

6. Разработка математического метода перехода спектральных уравнений при наличии прецессии в дифференциальной форме к спектральным уравнениям в операторной форме.

7. Проведение исследования и построение области существования прецессии маятника в плоскости параметров. Построение траектории движения конца маятника при прецессии.

Объектом исследования являются параметрические колебания с учетом демпфирования и прецессии плоскости колебаний маятника на кардановом подвесе.

Предмет исследования – закономерности и особенности исследования областей устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров для параметрических колебаний с учетом демпфирования и возникновения прецессии при колебаниях маятника на кардановом подвесе.

Методы исследования. Теория итерационных алгоритмов для решения спектральных задач с интегральными операторами, методы программирования, теория дифференциальных уравнений, методы вычислительной математики.

На защиту выносятся следующие результаты, соответствующие трем пунктам специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам:

Пункт 1: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений. Новый математический метод по моделированию параметрических колебаний с учетом демпфирования, на основе которого дифференциальная задача сводится к спектральной с интегральными операторами. Новый математический метод по моделированию прецессии плоскости колебаний маятника на кардановом подвесе.

Пункт 2: Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей. Численный метод решения спектральной задачи для линейного пучка интегральных операторов.

Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента. Программный комплекс раз-

работанного итерационного алгоритма на основе численного решения задач устойчивости при параметрических колебаниях с проведением различных видов тестирования и обоснование существования прецессионного движения маятника на кардановом подвесе.

Таким образом, в соответствии с паспортом специальности 05.13.18 в диссертации присутствуют оригинальные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

Научная новизна выносимых на защиту результатов заключается в следующем.

1. Получен новый математический метод исследования спектральной задачи с интегральными операторами для расчета границ устойчивости параметрических колебаний с учетом демпфирования.

2. Получен новый математический метод исследования спектральной задачи с интегральными операторами для расчета области прецессии в плоскости параметров маятника на кардановом подвесе при вынужденных вертикальных колебаниях точки подвеса.

3. Предложен новый численный метод для решения спектральных задач.

4. Создан программный комплекс для математического моделирования процессов параметрических колебаний.

5. Построены зоны устойчивости и неустойчивости для параметрических колебаний с учетом демпфирования.

6. Построена область прецессии в плоскости параметров маятника на кардановом подвесе при вынужденных вертикальных колебаниях точки подвеса.

Достоверность результатов исследования обеспечивается: математически строгими доказательствами, совпадением оценки качественного поведения областей в задачах устойчивости с известными ранее диаграммами Айнса-Стретта.

Практическая значимость. Сделан существенный вклад по внедрению в научный арсенал методов исследования устойчивости нового, эффективного итерационного алгоритма. Для параметрических колебаний с учетом демпфирования получены области устойчивости, пригодные для инженерной практики и обобщающие аналогичные результаты Айнса-Стретта. На основе теоретических исследований и численных расчетов открыт новый физический эффект существования прецессии плоскости колебаний маятника на кардановом подвесе при вынужденных вертикальных колебаниях точки подвеса. Разработан комплекс программ для численного нахождения спектральных чисел задачи о

параметрических колебаниях при наличии демпфирования и задачи о прецессии маятника на кардановом подвесе.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на научных семинарах кафедры прикладной математики, строительные технологии и конструкции, лаборатории математического моделирования в строительстве Сургутского государственного университета и на следующих конференциях:

- VIII Окружная конференция молодых ученых «Наука и инновации XXI века», г. Сургут (2007 г.);

- IV международная конференция «Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания», г. Обнинск (2008 г.);

- Всероссийская конференция по математике и механике, г. Томск (2008 г.).

Публикации. Основные результаты отражены в 7 публикациях, в том числе 4 публикации в рецензируемых журналах из перечня ВАК, получены свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад. Результаты, составляющие основное содержание, получены автором самостоятельно. Во всех совместных работах автор участвовал в формулировках постановок задач, создал и реализовал в виде комплекса программ численный метод для моделирования параметрических колебаний систем с учетом демпфирования и прецессии. Автор исследовал операторные уравнения, рассматривал вопрос возможности применения итерационной схемы, анализировал результат.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы из 68 наименований. Общий объем работы составляет 100 страниц, в том числе 24 рисунка и 2 таблицы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследования в области параметрических колебаний.

В первой главе проводится обзор литературы по тематике связанной с параметрическими колебаниями, формулируется цель, объект, предмет, задачи исследования, научная новизна и др.

При отсутствии демпфирования проведены достаточно полные расчеты, характеризующие границы между областями устойчивости и неустойчивости, которые называются диаграммами Айнса-Стретта. Построение этих диаграмм было основано на свойствах функций Матье, являющихся решениями уравнения параметрических колебаний $y'' + [a + q \cos 2t]y = 0$. Если в уравнении $y'' + [a + q\varphi(t)]y = 0$ периоди-

ческая функция $\varphi(t) \neq \cos 2t$, то для его решения можно использовать результаты Флоке (1883).

По анализу устойчивости решения уравнения параметрических колебаний при наличии демпфирования $y'' + \vartheta y' + \varphi(t)y = 0$ имеется большое количество литературы. Основным содержанием этих работ является получение оценок, характеризующих области устойчивости в плоскости параметров. Однако ни в одной из этих работ не приводятся диаграммы, точно описывающие эти области в случае $\vartheta \neq 0$ типа диаграмм Айнса-Стретта.

Теория колебаний маятника при вертикальных вынужденных колебаниях точки подвеса и колебаниях маятника в одной плоскости рассматривались во многих работах, как экспериментально, так и теоретически, при этом был установлен интересный эффект стабилизации маятника в перевернутом положении, когда центр тяжести маятника был выше точки подвеса. Этот эффект в ряде работ обобщался на исследование устойчивости некоторых технических систем с вибрирующим основанием.

Обширный материал по исследованию различных видов маятников и маятниковых систем приведен в работе Т.Г. Стрижак.

Анализ литературы показал, что схема появления прецессионного движения плоскости колебаний маятника ранее не рассматривалась.

Интерес представляет не только сам механический эффект, но и его математическое обоснование, а также метод численного нахождения параметров прецессии.

Во второй главе в разделе 2.1 рассматривается математическая модель задачи исследования устойчивости параметрических колебаний с демпфированием:

$$y'' + \vartheta y' + [a + q\varphi(t)]y = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad q \neq 0, \quad q \neq \infty, \quad (1)$$

$$\varphi(t) = \varphi(t + \pi), \quad \int_0^\pi \varphi(t) dt = 0, \quad |\varphi(t)| \leq 1, \quad \varphi(t) \in C(0, 2\pi).$$

Уравнение является исходным для математических исследований и расчетов, но не для реального использования в физике и технике, где оно имеет следующий вид:

$$y'' + \vartheta_0 y' + [a_0 + q_0\varphi(\omega\tau)]y = 0, \quad (2)$$

Здесь τ – размерное время, ϑ_0 – некоторый коэффициент трения, a_0, q_0 – параметры, характеризующие воздействие, приводящее к параметрическому резонансу, ω – частота этого воздействия. При переходе к безразмерному времени $t = \omega\tau/2$ получается уравнение, где ве-

личины $\vartheta = 2\vartheta_0/\omega$, $a = 4a_0/\omega^2$, $q = 4q_0/\omega^2$ являются безразмерными.

Коэффициент ϑ называется коэффициентом демпфирования, коэффициент q – коэффициентом возбуждения колебаний.

В разделе 2.2 задача нахождения границ устойчивости решения уравнения (1) сводится к спектральной задаче. На основе теории Флоке решение уравнения (1) представляется в виде

$$y(t) = \omega_1(t)\exp\left(\frac{t}{\pi} \ln \sigma_1\right) + \omega_2(t)\exp\left(\frac{t}{\pi} \ln \sigma_2\right), \quad (3)$$

$$\omega_1(t) = \omega_1(t + \pi), \quad \omega_2(t) = \omega_2(t + \pi),$$

мультипликаторы σ_1, σ_2 являются корнями уравнения

$$\sigma^2 - 2p\sigma + \exp(-\vartheta\pi) = 0, \quad p = \frac{1}{2}[x_1(\pi) + x_2'(\pi)], \quad (4)$$

где $x_1(t), x_2(t)$ частные решения уравнения (1), с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 1.$$

Кривая в плоскости aq , отделяющая зоны устойчивости и неустойчивости решения уравнения (1), обозначается символом Γ .

Теорема 1. На кривой Γ мультипликаторы σ_1, σ_2 принимают только один из двух вариантов значений:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = \exp(-\vartheta\pi); \\ \sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = -\exp(-\vartheta\pi). \end{aligned}$$

Сопоставим задаче нахождения кривой Γ спектральную задачу для дифференциального уравнения

$$y'' + \vartheta y' + \lambda[1 + \eta\varphi(t)]y = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (5)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(2\pi), \quad (6)$$

$$y'(0) = y'(2\pi)\exp(2\vartheta\pi) \quad (7)$$

и функциональным условием

$$y \in C_1(0, 2\pi), \quad (8)$$

где λ – спектральный параметр, который зависит от переменного параметра η и принимает такие значения, при которых система (5) – (8) имеет нетривиальное решение.

На промежутке $0 < t < 2\pi$ уравнения (1) и (5) совпадают, если положить

$$\lambda = a, \quad q = \eta a. \quad (9)$$

Теорема 2. Если решение спектральной задачи в дифференциальной форме (5) – (8) существует, то множество Γ состоит только из точек a, q , полученных по формулам (9), а задача исследования и вычисления кривой Γ эквивалентна проблеме исследования и вычисления спектра задачи (5) – (8).

Основным результатом главы являются краевые условия (6), (7) которые дают возможность перейти от бесконечного промежутка к конечному.

В третьей главе в разделе 3.1 осуществляется переход от спектральной задачи (5) – (8) в дифференциальной форме к эквивалентной задаче в операторной форме. Рассматривается уравнение

$$u = Fu + \lambda Bu, u \in H, \quad (10)$$

где λ – спектральный параметр, H – гильбертово пространство.

Операторы B, F задаются в следующем виде

$$Bu = \int_0^t f(\tau)u(\tau)d\tau - f(t)\int_0^t u(\tau)d\tau - h_1(u) - f(t)\frac{1}{f(2\pi)}\int_0^{2\pi} f(\tau)u(\tau)d\tau,$$

$$f(t) = \int_0^t \exp(\vartheta(\tau - \gamma))[1 + \eta\varphi(\tau)]d\tau, \quad \gamma = \frac{1}{\vartheta} \ln \frac{1 + \exp(2\vartheta\pi)}{2}.$$

$$h_1(u) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^t f(\tau)u(\tau)d\tau - f(t)\int_0^t u(\tau)d\tau \right\} dt - |f(2\pi)|^{-1} \left(\int_0^{2\pi} f(t)dt \right) \left(\int_0^{2\pi} f(\tau)u(\tau)d\tau \right) \Bigg\}.$$

$$F(u) = [1 - \exp(\vartheta(t - \gamma))]u + h_2(u),$$

$$h_2(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\exp(\vartheta(t - \gamma)) - 1] u dt.$$

Собственные числа и соответствующие собственные функции уравнения (10) можно находить последовательно, начиная с первого, по следующей итерационной схеме:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= Fu_k + \sigma_k Au_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad u_1 = Ah, \quad h \in H, \\ \sigma_k &= \|Au_k\|^{-2} \left(-(Fu_k, Au_k) + \left((Fu_k, Au_k)^2 + \|Au_k\|^2 (\|u_k\|^2 - \|Fu_k\|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Данный итерационный алгоритм сходится к решению уравнения (10) в смысле $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lambda_1^2$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - \varphi_1\|^2 = 0$, где λ_1^2 – первое спектральное число, φ_1 – первая собственная функция, параметры σ_k монотонно уменьшаются на итерациях $\sigma_k > \sigma_{k+1}$.

Последующие спектральные числа λ_i^2 и собственные функции φ_i находятся по индукции на основе построения вспомогательных операторов $F_m, A_m, m = 2, 3, 4, \dots$ и итерационного алгоритма (11).

Теорема 3. При любом значении параметра $0 < |\eta| < \infty$ и любом значении коэффициента демпфирования $\vartheta, 0 \leq \vartheta < \infty$, нахождение множества $a, q \in \Gamma$ для уравнения (10) эквивалентно решению спектрального уравнения на основе итерационного алгоритма, при этом параметры a, q связаны с параметрами λ_i, η соотношениями

$$a_i = \lambda_i, \quad q_i = \lambda_i \eta,$$

где $a_i = a_i(q_i)$ – отдельные ветви многозначной функции Γ .

Для любого значения коэффициента ϑ в плоскости aq имеется бесконечная последовательность чередующихся областей устойчивости и неустойчивости решения уравнения (1).

В разделе 3.2 описывается программный комплекс и результаты численного счета.

Программный комплекс написан с использованием модульного подхода, структура его представлена на рис. 1. Программа состоит из четырех основных частей, содержащих модули для расчета: спектральных чисел уравнения колебаний при наличии демпфирования, погрешности независимым способом по величине невязки, спектральных чисел уравнения колебаний при наличии прецессионного движения маятника на кардановом подвесе, координат точек траектории движения конца маятника на плоскость ортогональную оси подвеса.

Один из дополнительных модулей комплекса содержит операторы описания именованных констант и основных переменных, которые используются для расчета и сохранения результатов. Другой модуль содержит процедуры, отвечающие за задание начальных условий. Таким образом, при изменении решаемой задачи требуется изменять только эти процедуры без необходимости модификации тела основной программы. Вспомогательная процедура инициализирует переменные, хранящие значения количества расчетных точек, шага по времени и управляющих параметров, сохраняет промежуточные значения переменных в файл, служит для вывода данных на экран, записи результатов расчетов в файлы.

Разработанный программный комплекс оснащен оконным пользовательским интерфейсом, позволяющим варьировать условия задачи без изменения и перекомпиляции исходного кода.

Вычисление части кривой Γ , соответствующей в плоскости aq границе между первой зоной устойчивости и зонами неустойчивости, проводилось на основе итерационной схемы при задании функции $\varphi(t) = \cos 2t$.

Результаты расчетов контролировались двумя способами:

1. По величине относительной невязки уравнения (10):

$$\varepsilon_1 = \frac{\|\varphi_j - F\varphi_j - \lambda_j B u_j\|}{\|\varphi_j\| + \|F\varphi_j\| + \|\lambda_j B u_j\|}.$$

2. Независимым способом, минуя теоремы 2 и 3. По величине невязки

$$\varepsilon_2 = \frac{[x_1(\pi) + x_2'(\pi)]^2 - (1 + \exp(-9\pi))^2}{[x_1(\pi) + x_2'(\pi)]^2 + (1 + \exp(-9\pi))^2}.$$

В этом случае величина $x_1(\pi) + x_2'(\pi)$ находилась из численного решения дифференциального уравнения (1) на промежутке $(0, \pi)$. Причем в качестве параметров a и q в уравнение (1) подставлялись параметры, найденные по итерационной схеме (11).

Интегралы в операторах считались по квадратурным формулам трапеций с числом узлов на промежутке $(0, 2\pi)$ равным 3000. При расчетах параметр η варьировался с переменным шагом от 0,1 до 1000, для ошибок ε_1 , ε_2 выполнялись неравенства $\varepsilon_1 \leq 10^{-5}$, $\varepsilon_2 \leq 10^{-2}$.

В качестве примера для $\vartheta = 0,01$; $a = 1,025$; $q = 0,051$ в табл. 1 приводится значение погрешности ε_2 в зависимости от величины шага Δt_k в конечно-разностной схеме решения уравнения (1) на промежутке $(0, \pi)$ при равномерном разбиении промежутка.

Таблица 1

Значения погрешности ε_2 в зависимости от величины шага Δt_k

Δt_k	$\pi \cdot 10^{-3}$	$\pi \cdot 10^{-4}$	$\pi \cdot 10^{-5}$	$\pi \cdot 10^{-6}$
ε_2	0,005	0,003	0,001	0,0004



Рис. 1. Структура программного комплекса для численного моделирования задач параметрических колебаний

Уменьшение шага Δt_k приводит к лучшей конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения (1), повышению точности его решения, уменьшению ошибки ε_2 . Однако это происходит пока величина Δt_k не достигнет некоторого малого значения, когда ошибка ε_2 начинает возрастать с уменьшением шага Δt_k , что связано с увеличением погрешности от представления чисел с конечным числом значащих цифр в компьютере и погрешностей выполнения арифметических операций.

Результаты численных расчетов кривой Γ для значений $\vartheta = 0,01$; $\vartheta = 0,1$; $\vartheta = 0,2$; $\vartheta = 0,3$; $\vartheta = 0,4$; $\vartheta = 0,5$; $\vartheta = 1$ приведены на (рис. 2–8), в силу симметрии кривой Γ относительно оси a , показаны только кривые в полуплоскости $q > 0$.

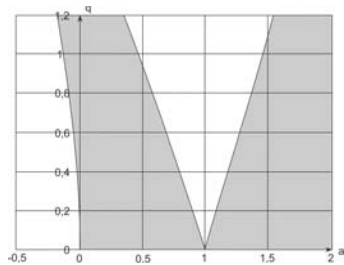


Рис. 2. Зоны устойчивости и неустойчивости для значения: $\vartheta = 0,01$

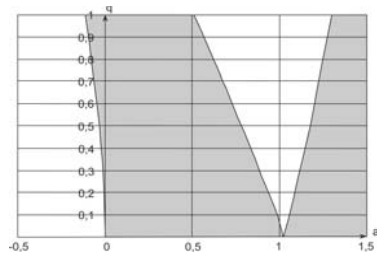


Рис. 3. Зоны устойчивости и неустойчивости для значения: $\vartheta = 0,1$

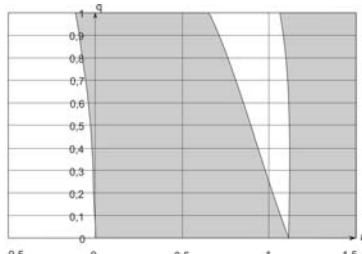


Рис. 4. Зоны устойчивости и неустойчивости для значения: $\vartheta = 0,2$

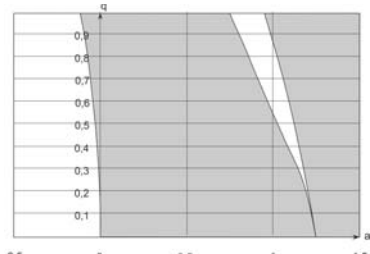


Рис. 5. Зоны устойчивости и неустойчивости для значения: $\vartheta = 0,3$

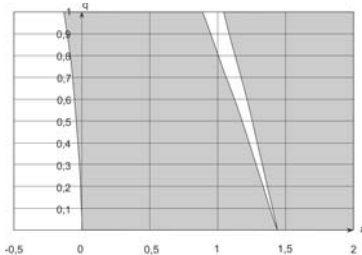


Рис. 6. Зоны устойчивости и неустойчивости для значения: $\vartheta = 0,4$

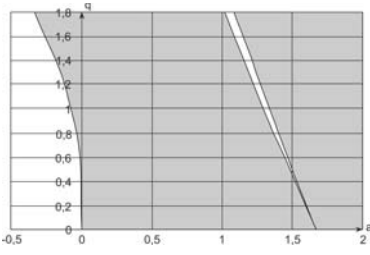


Рис. 7. Зоны устойчивости и неустойчивости для значения: $\vartheta = 0,5$

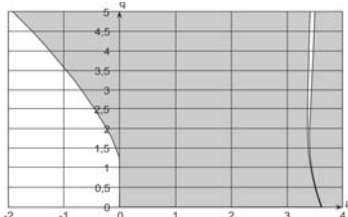


Рис. 8. Зоны устойчивости и неустойчивости для значения: $\vartheta = 1$

На рисунках зоны устойчивости окрашены в серый цвет, а зоны неустойчивости имеют белый цвет.

Общая картина изменения зон устойчивости и неустойчивости.

- При значении $\vartheta = 0,01$ граница практически не отличается от границы на диаграмме Айнса-Стретта, в которой полагается $\vartheta = 0,00$.

- Первая зона устойчивости монотонно растет с увеличением ϑ , причем ее левая граница асимптотически стремится к оси q при $a = 0$, а правая граница перемещается по оси a вправо и вверх по оси q .

- Зона неустойчивости при $a > 0, q > 0$ также перемещается вправо и вверх, не отрываясь от оси a при $q = 0$, где имеется кратная точка. Ширина зоны монотонно уменьшается, асимптотически стремясь к нулю.

Характер участков кривой Γ , которые получались приближенными методами, качественно отличается. С ростом коэффициента ϑ кривые отделяются от кратных точек, но перемещаются не вправо по оси a , как в настоящей работе, а вверх по оси q .

В главе 3 речь идет о решении не единственной задачи, так как исходное уравнение содержит произвольную, π – периодическую функцию $\varphi(t)$. Численное решение задачи проводилось, когда функция $\varphi(t)$ задавалась в виде $\varphi(t) = \cos 2t$.

В четвертой главе рассматривается возможность появления прецессии плоскости колебаний маятника на кардановом подвесе, структура которого приведена в разделе 4.1. При этом маятник совершает вынужденные колебания в вертикальном направлении и может совершать колебания относительно точки подвеса в любой плоскости, а плоскость колебаний может свободно поворачиваться. Схема маятника на кардановом подвесе изображена на рис. 9.

В разделе 4.2 осуществляется математическая постановка задачи.

Система уравнений получается в следующих предположениях.

- Угол отклонения маятника относительно вертикальной оси z мал и синус этого угла можно заменить на величину угла.

- Угол θ между плоскостью колебаний и осью координат x является функцией времени t .

- Маятник представляет невесомый стержень длиной l , имеющий на конце сосредоточенную массу m .

- Периодическое внешнее воздействие на вертикальной оси имеет гармонический характер с частотой ω и амплитудой δ , поэтому, смещение W точки подвеса в вертикальном направлении задается соотношением $W = -\delta \cos \omega t$.

Используя закон сохранения момента количества движения маятника относительно точки подвеса, получаем:

$$I\varphi_x'' + ml(g + \delta\omega^2 \cos \omega t)\varphi_x = 0, \quad (12)$$

$$I\varphi_y'' + ml(g + \delta\omega^2 \cos \omega t)\varphi_y = 0, \quad (13)$$

где φ_x, φ_y – проекции угла отклонения маятника относительно вертикальной оси на оси x, y, I – момент инерции маятника, g – ускорение силы тяжести.

Переходя к безразмерному времени $\tau = \frac{\omega t}{2}$ и безразмерным параметрам a, q

$$a = \frac{4}{\omega^2} \frac{mgl}{I}, \quad q = 4\delta \frac{ml}{I},$$

уравнения (12), (13) можно переписать в виде

$$\varphi_x'' + (a + q \cos 2\tau)\varphi_x = 0, \quad (14)$$

$$\varphi_y'' + (a + q \cos 2\tau)\varphi_y = 0. \quad (15)$$

Представим функции $\varphi_x(\tau), \varphi_y(\tau)$ в виде

$$\varphi_x = R_1(\tau) \cos \alpha\tau + R_2(\tau) \sin \alpha\tau, \quad (16)$$

$$\varphi_y = R_1(\tau) \sin \alpha\tau - R_2(\tau) \cos \alpha\tau, \quad (17)$$

где α – постоянная составляющая скорости прецессии маятника.

Вводя обозначения $\eta = q/\lambda$, $\psi(\tau) = 1 + \eta \cos 2\tau$, $\lambda = a - \alpha^2$, получим

$$R_1'' + 2\alpha R_2' + \lambda\psi(\tau)R_1 = 0, \quad (18)$$

$$R_2'' - 2\alpha R_1' + \lambda\psi(\tau)R_2 = 0. \quad (19)$$

Нетривиальное решение уравнений (18), (19) будем искать в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых, π - периодических функций, что приводит к следующим краевым условиям

$$R_1(0) = R_1(\pi), R_2(0) = R_2(\pi), \quad (20)$$

$$R_1'(0) = R_1'(\pi), R_2'(0) = R_2'(\pi).$$

В главе пятой в разделе 5.1 произведено математическое моделирование операторной формы спектральной задачи. В гильбертовом пространстве H рассматривается спектральное уравнение относительно спектрального параметра λ

$$u = Gu + \lambda Au, \quad u \in H. \quad (21)$$

Оператор A задается следующим образом

$$Au = \begin{pmatrix} A_{11}u_1 & 0 \\ 0 & A_{11}u_2 \end{pmatrix},$$

$$A_{11}u_k = \int_0^\tau f(\tau_1)u_k(\tau_1)d\tau_1 - f(\tau) \int_0^\tau u_k(\tau_1)d\tau_1 + h_1 - \frac{f(\tau)}{f(\pi)} \int_0^\tau f(\tau)u_k(\tau)d\tau,$$

$$f(\tau) = \int_0^\tau (1 + \eta \cos 2\tau)d\tau.$$

Оператор G задается следующим образом

$$Gu = \alpha \begin{pmatrix} 0 & G_{12}u_2 \\ -G_{12}u_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_{12}u_k = \int_0^\tau u_k(\tau_1)d\tau_1 + h_2(u_k), \quad k = 1, 2.$$

Теорема 4. Уравнение (21) имеет, по крайней мере, одно действительное значение спектрального параметра $\lambda \equiv \lambda(\alpha, \eta)$ при всех значениях $0 \leq \alpha < 2$, $0 \leq \eta < 1$.

Для получения значения спектрального параметра λ при разных значениях параметров α , η можно использовать итерационную схему

$$z(k+1) = Gz(k) + \sigma_k Az(k), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$z_1 = Ah, \quad h \in H$$

$$\sigma_k = \left\| Az(k) \right\|^{-2} \left\{ - (Az(k), Gz(k)) + \left((Az(k), Gz(k))^2 + \|Az(k)\|^2 (\|z(k)\|^2 - \|Gz(k)\|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

где k – номер итерации. Итерационная схема всегда сходится.

Теорема 5. В плоскости параметров λ, q ($q = \lambda\eta$) существует, по крайней мере, одна зона устойчивости, в которой имеется нетривиальное решение спектральной задачи (18) – (20) при $\alpha \neq 0$.

Отсюда следует существование, по крайней мере, одной зоны устойчивости, в которой существует прецессия при параметрических колебаниях маятника. Вопрос о том, все ли зоны устойчивости являются зонами прецессии, остается открытым.

В разделе 5.2 строится на основе итерационной схемы алгоритм численных расчетов, с использованием разработанного программного комплекса.

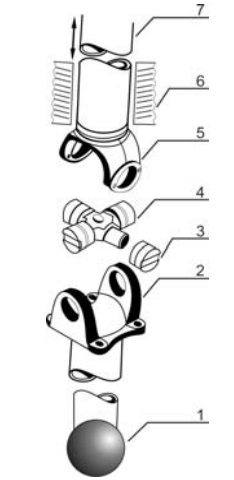


Рис. 9. Маятник на кардановом подвесе: 1 – маятник, 2 – нижняя вилка, 3 – подшпикник, 4 – крестовина, 5 – верхняя вилка, 6 – опора, 7 – шток

На каждой итерации для итерационных параметров σ_k должно выполняться условие $\sigma_k > \sigma_{k+1}$, а для нормы $\|z(k)\| = \|z(k+1)\|, \forall k$.

Погрешность решения, оценивалась по величине невязки

$$\varepsilon = \frac{\|z(k) - Gz(k) - \sigma_k Az(k)\|}{\|z(k)\| + \|Gz(k)\| + \sigma_k \|Az(k)\|}.$$

Для всех проведенных расчетов $\varepsilon \leq 0,000001$.

Тестом для решаемой задачи явилось совпадение границы зоны прецессии с кривой, отделяющей зону устойчивости и неустойчивости на диаграмме Айнса-Стретта.

Все интегралы в операторах вычислялись по квадратурным формулам трапеций с равномерным разбиением интервала $0 \leq \tau \leq \pi$ на 2000 частей.

На рис. 10 представлена функциональная зависимость $\alpha = \alpha(\lambda, q)$, где λ результат численного решения спектральной задачи (21), q определяется формулой $q = \lambda \eta \equiv q(\alpha, \eta)$. Зависимость $\alpha = \alpha(\lambda, q)$ представлена в виде линий уровня $\alpha = const$. Серым цветом выделена зона, в которой решение спектральной задачи отсутствует.

Результаты, представленные на рис. 10, переносятся на плоскость физических параметров a, q (рис. 11), где $a = \lambda + \alpha^2 \equiv \lambda(\alpha, q) + \alpha^2$.

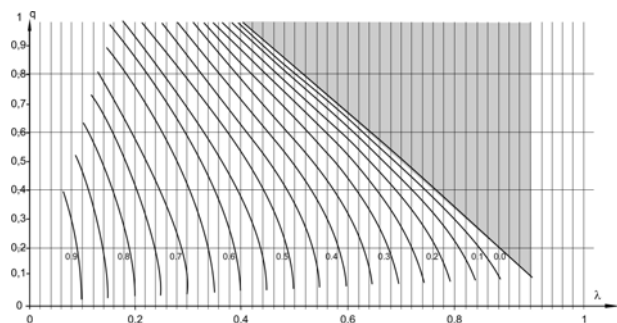


Рис. 10. Линии уровня $\alpha = const$ функциональной зависимости $\alpha = \alpha(\lambda, q)$, где значения α обозначены числами на кривых

На рис. 11 серым цветом окрашена зона параметров a, q в которой существует прецессия боковых колебаний маятника. Эта зона представляет криволинейную полосу, отделяющую с одной стороны зону неустойчивости колебаний (кривая 1 на рис. 11), а с другой стороны зону, в

которой боковые колебания маятника отсутствуют при сохранении вертикальных колебаний (кривая 2 на рис. 11).

Кривая 1 совпадает с кривой, отделяющей зоны устойчивости и неустойчивости на диаграмме Айнса-Стретта, и на кривой 1 скорость прецессии α равна нулю.

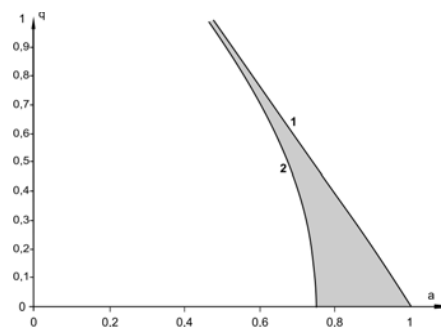


Рис. 11. Зона прецессии на части диаграммы Айнса-Стретта в плоскости параметров a, q

На (рис. 12–17) изображена траектория движения конца маятника на плоскость ортогональную оси подвеса при различных значениях α, η .

От величины α зависит число колебаний при минимальном числе оборотов по орбите для полного периода периодической кривой (табл. 2). Дан-

ная зависимость реализуется не при всех α , а только тогда, когда значения параметров a, q попадают в зону прецессии.

Если отношение α/η является иррациональным числом, то теоретически совпадения начала и конца циклов не будет, но при численных расчетах, когда иррациональное число аппроксимируется рациональным числом, такое совпадение будет выполняться. Следует подчеркнуть, что величины φ_x, φ_y характеризуют безразмерные угловые амплитуды поперечных колебаний маятника.

Таблица 2

Значения числа колебаний (k) при минимальном числе оборотов (n) по орбите до появления периодического решения

α	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7
k	10	20	5	4	10	20	5	20	2	20	5	20	10
n	1	3	1	1	3	1	2	9	1	11	3	13	7

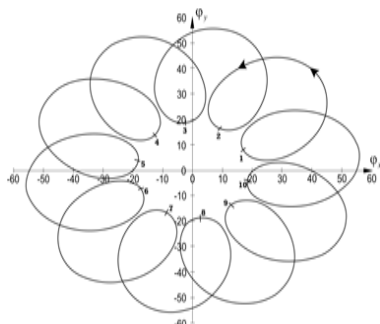


Рис. 12. Траектория движения конца маятника на плоскость ортогональную оси подвеса при $\alpha = 0,1, \eta = 0,08$

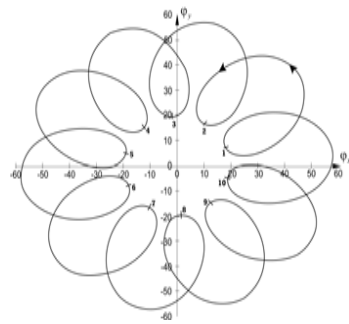


Рис. 13. Траектория движения конца маятника на плоскость ортогональную оси подвеса при $\alpha = 0,1, \eta = 0,11$

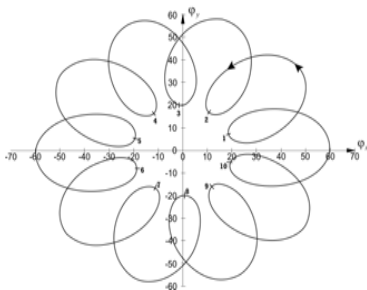


Рис. 14. Траектория движения конца маятника на плоскость ортогональную оси подвеса при $\alpha = 0,1, \eta = 0,14$

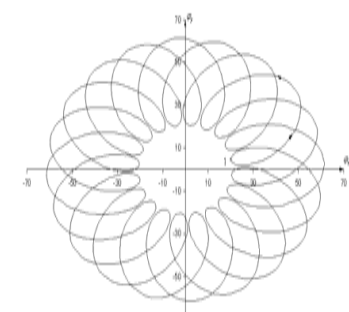


Рис. 15. Траектория движения конца маятника на плоскость ортогональную оси подвеса при $\alpha = 0,15, \eta = 0,29$

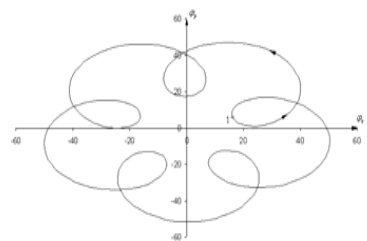


Рис. 16. Траектория движения конца маятника на плоскость ортогональную оси подвеса при $\alpha = 0,2, \eta = 0,0615$

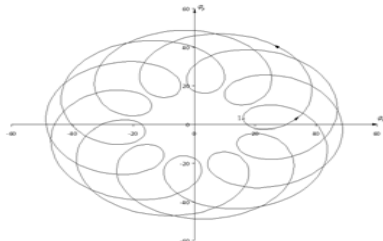


Рис. 17. Траектория движения конца маятника на плоскость ортогональную оси подвеса при $\alpha = 0,3, \eta = 0,01$

Так как необходимо было численное подтверждение самого факта прецессии, расчеты были ограничены первой зоной устойчивости параметрических колебаний на диаграмме Айнса-Стретта, где такая зона устойчивости нашлась.

В заключении описаны результаты работы и положения, выносимые на защиту.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработан математический метод перехода задачи о нахождении границ между областями устойчивости и неустойчивости параметрических колебаний с учетом демпфирования к спектральной задаче для дифференциального уравнения.
2. Разработан математический метод перехода спектрального уравнения с учетом демпфирования в дифференциальной форме к спектральному уравнению в операторной форме.
3. Разработан программный комплекс для математического моделирования процессов параметрических колебаний на основе итерационной схемы.
4. Проведено исследование и построены области устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров, характеризующих воздействие, приводящее к параметрическому резонансу.
5. Разработан математический метод перехода задачи о прецессии маятника на кардановом подвесе при вынужденных вертикальных колебаниях точки подвеса к спектральному дифференциальному уравнению.
6. Разработан математический метод перехода спектральных уравнений при наличии прецессии в дифференциальной форме к спектральным уравнениям в операторной форме.
7. Проведено исследование и построена область существования прецессии маятника в плоскости параметров. Построены траектории движения конца маятника при прецессии.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Публикации в периодических изданиях, рекомендованных ВАК

1. Тараканов В.И., Лысенкова С.А. Итерационный алгоритм определения устойчивости уравнения колебаний при наличии демпфирования // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН Сиб. отд. (Новосибирск). – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 103–119.
2. Тараканов В.И., Лысенкова С.А., Нестеренко М.В. Прецессия при параметрических колебаниях маятника на кардановом подвесе // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН Сиб. отд. (Новосибирск). – 2013. – Т. 16, № 4. – С. 393–404.

3. Tarakanov V.I., Lysenkova S.A. Iterative algorithm of determining the stability of an equation of oscillations with damping // Numerical Analysis and Application, Pleiades Publishing Inc. – 2012. – Vol. 5, № 1. – P.84–98.
4. Tarakanov V.I., Lysenkova S.A., Nesterenko M.V. The precession of a parametric oscillation pendulum with the Cardano suspension // Numerical Analysis and Application, Pleiades Publishing Inc. – 2013. – Vol. 16, № 4. – P. 370–381.

Публикации в других изданиях

5. Тараканов В.И., Лысенкова С.А. Параметрический резонанс при импульсном нагружении // Тр. СурГУ. № 25. Физ.-тех. науки. – Сургут, 2006. – С. 62–70.
6. Тараканов В.И., Лысенкова С.А., Нестеренко М.В., Никифоров И.В. Линейный пучок компактных, частично симметричных операторов в гильбертовом пространстве // Математические идеи П.Л. Чебышева их приложение к современным проблемам естествознания: Тез. докл. 4-ой Междунар. конф. – Обнинск: ИАТЭ НИЯУ МИФИ, 2008. – С. 72–73.
7. Тараканов В.И., Лысенкова С.А., Нестеренко М.В., Никифоров И.В. Итерационные алгоритмы нахождения спектра компактных, частично симметричных операторов в гильбертовом пространстве // Всероссийская конференция по математике и механике: Тез. докл. – Томск, 2008. – С. 150.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

8. Лысенкова С.А. Свидетельство о регистрации программы «Программа для вычисления параметров прецессии маятника на кардановом подвесе». – 2012. – № 2012616893.
9. Лысенкова С.А. Свидетельство о регистрации программы «Программа нахождения спектральных чисел уравнения колебаний при наличии демпфирования». – 2012. – № 2012616894.

Лысенкова Светлана Александровна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 15.11.2013 г. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,28. Уч.-изд. л. 1,1. Тираж 120. Заказ № 84.

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
издательского центра СурГУ.
Тел. (3462) 76-30-65, 76-30-66.

Отпечатано в полиграфическом отделе
издательского центра СурГУ.
г. Сургут, ул. Энергетиков, 8. Тел. (3462) 76-30-67.

ГБОУ ВПО «Сургутский государственный университет ХМАО – Югры»
628400, Россия, Ханты-Мансийский автономный округ,
г. Сургут, пр. Ленина, 1.
Тел. (3462) 76-29-00, факс (3462) 76-29-29.

